第 15 講　漸化式と一般項の予想

15　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項はどう予想できるか.

(1)　$a_{n+1}=-2a_n+1,\quad a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=2a_n+2n-4,\quad a_1=1$

(3)　$a_{n+1}=3a_n+2^n,\quad a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=4a_n+4^n,\quad a_1=1$

(5)　$a_{n+2}-2a_{n+1}-8a_n=0,\quad a_1=0,\quad a_2=1$

(6)　$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0,\quad a_1=0,\quad a_2=1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　漸化式と一般項の予想

15　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項はどう予想できるか.

(1)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1,\quad a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=3a_n+2n-1,\quad a_1=1$

(3)　$a_{n+1}=4a_n+3^n,\quad a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=2a_n+2^n,\quad a_1=2$

(5)　$a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=0,\quad a_1=0,\quad a_2=6$

(6)　$a_{n+2}+6a_{n+1}+9a_n=0,\quad a_1=0,\quad a_2=1$

【選択肢】

(1)　㋐ $\dfrac{5}{4}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$　㋑ $2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　㋒ $\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

(2)　㋐ $2\cdot3^{n-1}-n$　㋑ $2\cdot3^{n}-2n-3$　㋒ $3^{n-1}-n+1$

(3)　㋐ $-2\cdot4^{n-1}+3^n$　㋑ 4^n-3^n　㋒ $4^n-3^{n-1}-3$

(4)　㋐ $n2^n$　㋑ $(n+3)2^{n-3}$　㋒ $(n+1)2^{n-1}$

(5)　㋐ $2^{n-1}-(-4)^{n-1}$　㋑ $3\cdot2^{n-1}-2(-4)^{n-1}$　㋒ $2^{n+1}+(-4)^n$

(6)　㋐ $(n-1)(-3)^{n-1}$　㋑ $(n-1)(-3)^{n-2}$　㋒ $(n-1)(-3)^{n}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 15 講　漸化式と一般項の予想

15　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項はどう予想できるか.

(1)　$a_{n+1}=-2a_n+1,\quad a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=2a_n+2n-4,\quad a_1=1$

(3)　$a_{n+1}=3a_n+2^n,\quad a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=4a_n+4^n,\quad a_1=1$

(5)　$a_{n+2}-2a_{n+1}-8a_n=0,\quad a_1=0,\quad a_2=1$

(6)　$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0,\quad a_1=0,\quad a_2=1$

【答】 (1) $\dfrac{2}{3}(-2)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$　(2) $2^{n-1}-2n+2$　(3) 3^n-2^n　(4) $n4^{n-1}$　(5) $\dfrac{4^{n-1}-(-2)^{n-1}}{6}$

(6) $(n-1)2^{n-2}$

【解答】

(1)　a_n の係数が -2 であることと，$a_{n+1}+2a_n$ が定数であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot(-2)^{n-1}+B$$

と予想できる.

また，$a_1=A+B=1$，$a_2=-2A+B=-1$ より $A=\dfrac{2}{3}$，$B=\dfrac{1}{3}$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=\frac{2}{3}(-2)^{n-1}+\frac{1}{3}}$$

(2)　a_n の係数が 2 であることと，$a_{n+1}-2a_n$ が n の 1 次式であることより，定数 A，B，C を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot 2^{n-1}+Bn+C$$

と予想できる.

また，$a_1=A+B+C=1$，$a_2=2A+2B+C=0$，$a_3=4A+3B+C=0$ より $A=1$，$B=-2$，$C=2$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}-2n+2}$$

(3)　a_n の係数が 3 であることと，$a_{n+1}-3a_n$ が公比 2 の等比数列であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot 3^{n-1}+B\cdot 2^{n-1}$$

と予想できる.

また，$a_1=A+B=1$，$a_2=3A+2B=5$ より $A=3$，$B=-2$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=3^n-2^n}$$

(4)　a_n の係数が 4 であることと，$a_{n+1}-4a_n$ が公比 4 の等比数列であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=(An+B)\cdot 4^{n-1}$$

と予想できる.

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，$a_1=A+B=1$，$a_2=8A+4B=8$ より $A=1$，$B=0$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=n4^{n-1}}$$

(5)　$x^2-2x-8=0$ の2解が4と -2 であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot 4^{n-1}+B\cdot(-2)^{n-1}$$

と予想できる.

また，$a_1=A+B=0$，$a_2=4A-2B=1$ より $A=\dfrac{1}{6}$，$B=-\dfrac{1}{6}$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=\frac{4^{n-1}-(-2)^{n-1}}{6}}$$

(6)　$x^2-4x+4=0$ は2を重解にもつので，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=(An+B)\cdot 2^{n-1}$$

と予想できる.

また，$a_1=A+B=0$，$a_2=4A+2B=1$ より $A=\dfrac{1}{2}$，$B=-\dfrac{1}{2}$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=(n-1)2^{n-2}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 15 講　漸化式と一般項の予想

15　次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項はどう予想できるか.

(1)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1,\quad a_1=1$

(2)　$a_{n+1}=3a_n+2n-1,\quad a_1=1$

(3)　$a_{n+1}=4a_n+3^n,\quad a_1=1$

(4)　$a_{n+1}=2a_n+2^n,\quad a_1=2$

(5)　$a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=0,\quad a_1=0,\quad a_2=6$

(6)　$a_{n+2}+6a_{n+1}+9a_n=0,\quad a_1=0,\quad a_2=1$

【選択肢】

(1)　㋐ $\dfrac{5}{4}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$　㋑ $2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　㋒ $\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

(2)　㋐ $2\cdot3^{n-1}-n$　㋑ $2\cdot3^n-2n-3$　㋒ $3^{n-1}-n+1$

(3)　㋐ $-2\cdot4^{n-1}+3^n$　㋑ 4^n-3^n　㋒ $4^n-3^{n-1}-3$

(4)　㋐ $n2^n$　㋑ $(n+3)2^{n-3}$　㋒ $(n+1)2^{n-1}$

(5)　㋐ $2^{n-1}-(-4)^{n-1}$　㋑ $3\cdot2^{n-1}-2(-4)^{n-1}$　㋒ $2^{n+1}+(-4)^n$

(6)　㋐ $(n-1)(-3)^{n-1}$　㋑ $(n-1)(-3)^{n-2}$　㋒ $(n-1)(-3)^n$

【答】　(1) ㋑　(2) ㋐　(3) ㋑　(4) ㋒　(5) ㋐　(6) ㋑

【解答】

(1)　a_n の係数が $\dfrac{1}{2}$ であることと，$a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n$ が定数であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+B$$

と予想できる.

また，$a_1=A+B=1$，$a_2=\dfrac{1}{2}A+B=\dfrac{3}{2}$ より $A=-1$，$B=2$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

(2)　a_n の係数が 3 であることと，$a_{n+1}-3a_n$ が n の 1 次式であることより，定数 A，B，C を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot3^{n-1}+Bn+C$$

と予想できる.

また，$a_1=A+B+C=1$，$a_2=3A+2B+C=4$，$a_3=9A+3B+C=15$ より $A=2$，$B=-1$，$C=0$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}-n}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　a_n の係数が 4 であることと，$a_{n+1}-4a_n$ が公比 3 の等比数列であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot 4^{n-1}+B\cdot 3^{n-1}$$

と予想できる．

また，$a_1=A+B=1$，$a_2=4A+3B=7$ より $A=4$，$B=-3$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=4^n-3^n}$$

(4)　a_n の係数が 2 であることと，$a_{n+1}-2a_n$ が公比 2 の等比数列であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=(An+B)\cdot 2^{n-1}$$

と予想できる．

また，$a_1=A+B=2$，$a_2=4A+2B=6$ より $A=B=1$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=(n+1)2^{n-1}}$$

(5)　$x^2+2x-8=0$ の 2 解が -4 と 2 であることより，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=A\cdot(-4)^{n-1}+B\cdot 2^{n-1}$$

と予想できる．

また，$a_1=A+B=0$，$a_2=-4A+2B=6$ より $A=-1$，$B=1$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}-(-4)^{n-1}}$$

(6)　$x^2+6x+9=0$ は -3 を重解にもつので，定数 A，B を用いて一般項は

$$a_n=(An+B)\cdot(-3)^{n-1}$$

と予想できる．

また，$a_1=A+B=0$，$a_2=-6A-3B=1$ より $A=-\dfrac{1}{3}$，$B=\dfrac{1}{3}$ であるので

$$\boldsymbol{a_n=(n-1)(-3)^{n-2}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。